MATHÉMATIQUES
Épreuve de spécialisation

2021
Concours cadre de direction

Documents, calculatrices et téléphones portables interdits

Les exercices I et II sont obligatoires.
Les candidats ont le choix entre les exercices III et IV.
Les exercices sont indépendants.
Il est demandé aux candidats de justifier les calculs.
Il sera tenu compte de la rédaction de la copie.

Exercice I (7,5 points)
Soit $n \geq 1$ et $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ une subdivision de l'intervalle réel $[a, b]$ en n intervalles de longueurs respectives $\Delta_i = x_{i+1} - x_i$, $0 \leq i \leq n-1$.
On appelle fonction spline cubique toute fonction $s : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ qui est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a, b]$ et telle que pour tout $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ et pour tout $x \in [x_i, x_{i+1}]$:

$$s(x) = p_i(x) = \alpha_i(x - x_i)^3 + \beta_i(x - x_i)^2 + \gamma_i(x - x_i) + \delta_i \ ,$$

avec $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ et δ_i des paramètres réels. La restriction de s à l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ est donc un polynôme de degré trois, noté p_i, $0 \leq i \leq n-1$.
Les fonction splines sont, par exemple, utilisées pour l'interpolation de nuages de points comme proposé dans la question 2.

1. Soit s une fonction spline cubique, écrire les contraintes qui découlent de la définition donnée au-dessus. Exprimer ces contraintes sur les coefficients $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ et δ_i en fonction des Δ_i, $0 \leq i \leq n-1$. En déduire le nombre de paramètres de s non déterminés.

2. Pour la subdivision de $[a, b]$ donnée au début et pour $y = (y_0, y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, on suppose qu'il existe une fonction spline cubique s vérifiant $s(x_i) = y_i$ pour tout $0 \leq i \leq n$.
   Montrer que l'on peut se ramener au cas où les seuls paramètres indéterminés qui restent sont α_{n-1} et β_{n-1}.

3. Soit s une fonction spline cubique vérifiant $s(x_i) = 0$ pour tout $0 \leq i \leq n$ et $s'(a) = s'(b) = 0$.
   En étudiant la quantité $\displaystyle\int_a^b s''(x)^2 \, dx$, montrer que s est identiquement nulle.

4. Soit $f \in \mathcal{C}^2([a, b])$, on garde la même subdivision de l'intervalle $[a, b]$. On note s_f une fonction spline cubique vérifiant $s(x_i) = f(x_i)$ pour $0 \leq i \leq n$ et $s'(a) = f'(a)$, $s'(b) = f'(b)$.
   Montrer que s_f existe et est unique.
   (Indic. : exprimer les $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ et δ_i, $0 \leq i \leq n-1$, comme solutions d'un système de Cramer dont on discutera l'existence de solutions)

Exercice II (8,5 points)
Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension $n \geq 2$. On considère un endomorphisme f de E qui est nilpotent d'ordre $p \geq 1$, c'est-à-dire qui vérifie : $f^{(p)} = O$, $f^{(p-1)} \neq O$.
Où O est l'endomorphisme nul, $f^{(0)} = Id_E$ et $f^{(m)} = f \circ f \circ \cdots \circ f$ (m facteurs).
Pour tout $k \in \{0, 1, \ldots, p\}$, on pose $N_k = \operatorname{Ker} f^{(k)}$, le noyau de $f^{(k)}$, et $I_k = \operatorname{Im} f^{(k)}$, l'image de $f^{(k)}$.

1. Montrer que $\{0_E\} = N_0 \subsetneq N_1 \subsetneq \cdots \subsetneq N_p = E$
   et $\{0_E\} = I_p \subsetneq I_{p-1} \subsetneq \cdots \subsetneq I_0 = E$.
   En déduire que $p \leq n$. (Note : par $\subsetneq$ on désigne une inclusion stricte)

2. Montrer que, pour tout $k \in \{0, 1, \dots, p-1\}$, on a $f(N_{k+1}) \subset N_k$.

3. Soit $k \in \{1, \dots, p-1\}$ fixé et soit F un sous-espace vectoriel de E tel que $F \cap N_k = \{0_E\}$.
   Montrer que $f(F) \cap N_{k-1} = \{0_E\}$ et que la restriction de f à F est une application linéaire injective de F dans $f(F)$.

4. Déduire de ce qui précède l'existence de sous-espaces vectoriels F_1, F_2, ..., F_p tels que :
   (a) pour $k \in \{1, \dots, p\}$: $N_k = F_k \oplus N_{k-1}$;
   (b) pour $k \in \{2, \dots, p\}$: la restriction de f à F_k est une application linéaire injective de F_k dans F_{k-1} ;
   (c) on a $E = F_1 \oplus F_2 \cdots \oplus F_p$.

   (Note : par $\oplus$ on désigne une somme directe)

On suppose pour la suite que $p = n$.

5. Construire une base de E de la forme $\{v, f(v), f^{(2)}(v), \dots, f^{(n-1)}(v)\}$, $v \in E$.
   Écrire la matrice de f dans cette base. Montrer que le déterminant $\det(f + Id_E) = 1$.

6. Montrer que $\det(f+g) = \det(g)$ pour tout endomorphisme g de E tel que $g \circ f = f \circ g$.
   (Indic. : si g inversible, montrer que $(f \circ g^{-1})^{(n)} = O$; sinon que $\{0_E\} \subsetneq \mathrm{Ker}\,(f+g)$)

Un exercice au choix parmi :

Exercice III (4 points)

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires ayant pour densité $f(x,y) = \dfrac{x+y}{2} e^{-(x+y)} \mathbb{I}_{\{x \geq 0, y \geq 0\}}(x,y)$, pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Par $\mathbb{I}$ on désigne la fonction indicatrice.

1. Vérifier que f est une densité de probabilité.

2. Déterminer les densités des lois de X et de Y.

3. Est-ce que X et Y sont des variables aléatoires indépendantes ?

4. Soit φ une fonction mesurable et bornée sur $\mathbb{R}$.
   Calculer $\mathbb{E}[\varphi(X+Y)]$ et en déduire la loi de $X+Y$.

Exercice IV (4 points)

Pour a et b des réels strictement positifs et pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $u_n = \left(\dfrac{n+1}{an+b}\right)^{n \ln(n)}$.
Étudier la nature de la série $\sum u_n$ en fonction des paramètres a et b.