MATHÉMATIQUES
Épreuve de spécialisation

2022
Concours cadre de direction

Documents, calculatrices et téléphones portables interdits

Les exercices I et II sont obligatoires.
Les candidats ont le choix entre les exercices III et IV.
Les exercices sont indépendants.
Il est demandé aux candidats de justifier les calculs.
Il sera tenu compte de la rédaction de la copie.

Exercice I (11 points)

Soient a, b et c des réels, on considère les fonctions définies par

$$e_1 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^{ax}\cos(bx) \end{array}, \quad e_2 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^{ax}\sin(bx) \end{array} \quad \text{et} \quad e_3 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & c\,e^{ax} \end{array}.$$

On note $E = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,/\, f = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3, (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3\}$ l'ensemble des combinaisons linéaires à coefficients réels des fonctions e_1, e_2 et e_3.

1. Montrer que E, muni de l'addition des applications et de la multiplication par des scalaires réels, est un espace vectoriel réel. Discuter sa dimension en fonction de a, b et c.
2. On suppose que $b \in \mathbb{R}^*$, alors pour $C \in \mathbb{R}$, on définit $\varphi : \begin{array}{rcl} E \times E & \to & \mathbb{R} \\ (f,g) & \mapsto & C \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{b}}^{\frac{\pi}{b}} f(x)g(x)e^{-2ax}dx \end{array}$.
   (a) Pour quelles valeurs de b et C, on définit ainsi un produit scalaire sur E ?
   (b) Pour a et b donnés, montrer qu'il existe une valeur positive unique, notée c^*, pour c et une valeur unique, C^* pour C, tel que $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ soit une base orthonormée de E muni du produit scalaire $\varphi(.,.)$.

Pour la suite on suppose c^* et C^* définis de façon à ce que $\mathcal{B}$ soit une base orthonormée de E muni du produit scalaire $\varphi(.,.)$ avec $\dim(E) = 3$.

3. On définit $\delta : \begin{array}{rcl} E & \to & E \\ f & \mapsto & f' \end{array}$, où f' désigne la dérivée de f si elle existe.
   (a) Montrer que δ est un homéomorphisme de E.
   (b) Déterminer la matrice M de δ par rapport à la base $\mathcal{B}$. Calculer le déterminant de M.
   (c) Dans les cas où M est inversible, calculer M^{-1}.
   (d) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer la matrice M^n en fonction de n, ρ et θ, où $(\rho, \theta) \in \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi[$ sont les coordonnées polaires du point $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice II (4,5 points)

En fonction des paramètres $(\alpha, \beta) \in]1, +\infty[^2$, déterminer les points critiques et étudier la nature des extrémas locaux de la fonction définie pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = \frac{x^2}{\alpha^2 - 1} + \frac{2xy}{\alpha\beta - 1} + \frac{y^2}{\beta^2 - 1}.$$

Un exercice au choix parmi :

Exercice III `(4,5 points)`

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie. On note $\mathcal{L}(E)$ l'algèbre des endomorphismes sur E, 0 la fonction constante nulle, Id_E l'application identité et pour $f \in \mathcal{L}(E)$, $f^{(n)} = f \circ f \circ \ldots \circ f$ (n facteurs).

Soient λ, μ des réels et $f \in \mathcal{L}(E)$ tels que $\lambda \neq \mu$ et $(f - \lambda Id_E) \circ (f - \mu Id_E) = 0$.

1. Vérifier que l'on a aussi $(f - \mu Id_E) \circ (f - \lambda Id_E) = 0$ et montrer par récurrence que $(f - \lambda Id_E)^{(n)} = (\mu - \lambda)^{n-1}(f - \lambda Id_E)$, pour $n \geq 2$.

2. Déduire de ce qui précède l'expression générale de $f^{(n)}$, $n \geq 1$.
   (Indic. : exprimer f grâce à $(f - \lambda Id_E)$ et $(f - \mu Id_E)$)

3. On suppose $\lambda\mu \neq 0$, montrer que f^{-1} existe et déterminer f^{-1}.

Exercice IV `(4,5 points)`

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie, pour $x \in \mathbb{R}$, par $f(x) = ke^{-\frac{|x-\lambda|}{\mu}}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu > 0$.

1. Trouver la constante k pour que la fonction f soit la densité d'une loi de probabilité d'une variable aléatoire réelle X. Donner la fonction de répartition de X.

2. On pose $Y = \frac{1}{\mu}(X - \lambda)$. Donner la fonction de répartition de Y, en déduire sa densité f_Y.

3. Calculer l'espérance et la variance de Y, en déduire celles de X.