MATHÉMATIQUES
Sujet d'annale

2023
Concours cadre de direction

Documents, calculatrices et téléphones portables interdits

Les exercices 1, 2 et 3 sont obligatoires.
Les candidats ont le choix entre les exercices 4 et 5.
Les exercices sont indépendants.
Il est demandé aux candidats de justifier les calculs dans les exercices 2 à 5.
Il sera tenu compte de la rédaction de la copie.

Exercice 1 `(5 points)`
Une seule réponse est correcte parmi les quatre réponses proposées.

Question n° 1 : Soit la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ donnée par $u_n = (1+2+3+\cdots+n)\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Parmi les propositions suivantes, laquelle est vraie ?

A. La suite a pour limite 0 quand n tend vers $+\infty$.
B. La suite n'admet pas de limite quand n tend vers $+\infty$.
C. La suite a pour limite $\frac{1}{2}$ quand n tend vers $+\infty$.
D. La suite a pour limite 1 quand n tend vers $+\infty$.

Question n° 2 : On calcule par intégration par parties l'intégrale $K = \displaystyle\int_0^{1/2} e^{\arcsin(x)}dx$.

A. On a $K = e^{\frac{\pi}{6}} - 1$.
B. On a $K = \frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{6}}$.
C. On a $K = \frac{1}{4}\left(e^{\frac{\pi}{6}}\sqrt{3} - 4\right)$.
D. On a $K = \frac{1}{4}\left(e^{\frac{\pi}{6}}(1+\sqrt{3}) - 2\right)$.

Question n° 3 : Soit la matrice A donnée par $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Parmi les propositions suivantes, laquelle est vraie ?

A. Le noyau de A^6 est de dimension 1.
B. Le noyau de A^6 est de dimension 2.
C. Le noyau de A^6 est de dimension 3.
D. Le noyau de A^6 est de dimension 4.

Question n° 4 : Les 26 lettres de l'alphabet sont écrites, sans répétition, au hasard sur une ligne. Quelle est la probabilité d'avoir les lettres A et B, côte à côte et dans cet ordre ?

A. La probabilité est $\dfrac{1}{24}$
B. La probabilité est $\dfrac{1}{24!}$
C. La probabilité est $\dfrac{1}{26}$.
D. La probabilité est $\dfrac{1}{26!}$

Question n° 5 : Soient A et B deux événements. Que vaut la probabilité que exactement un des deux événements A ou B se produise ?

A. Elle vaut $\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.

B. Elle vaut $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

C. Elle vaut $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

D. Elle vaut $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 2\mathbb{P}(A \cap B)$.

Exercice 2 `(5 points)`

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie. On note $\mathcal{L}(E)$ l'algèbre des endomorphismes sur E, 0 la fonction constante nulle, Id_E l'application identité et pour $f \in \mathcal{L}(E)$, $f^{(n)} = f \circ f \circ \ldots \circ f$ (n facteurs).

Soient λ, μ des réels et $f \in \mathcal{L}(E)$ tels que $\lambda \neq \mu$ et $(f - \lambda Id_E) \circ (f - \mu Id_E) = 0$.

1. Vérifier que l'on a aussi $(f - \mu Id_E) \circ (f - \lambda Id_E) = 0$ et montrer par récurrence que $(f - \lambda Id_E)^{(n)} = (\mu - \lambda)^{n-1}(f - \lambda Id_E)$, pour $n \geq 2$.

2. Déduire de ce qui précède l'expression générale de $f^{(n)}$, $n \geq 1$.
   (Indic. : exprimer f grâce à $(f - \lambda Id_E)$ et $(f - \mu Id_E)$)

3. On suppose $\lambda\mu \neq 0$, montrer que f^{-1} existe et déterminer f^{-1}.

Exercice 3 `(5 points)`

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires ayant pour densité $f(x, y) = \dfrac{x + y}{2} e^{-(x+y)} \mathbb{I}_{\{x \geq 0, y \geq 0\}}(x, y)$, pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Par $\mathbb{I}$ on désigne la fonction indicatrice.

1. Vérifier que f est une densité de probabilité.

2. Déterminer les densités des lois de X et de Y.

3. Est-ce que X et Y sont des variables aléatoires indépendantes ?

4. Soit φ une fonction mesurable et bornée sur $\mathbb{R}$.
   Calculer $\mathbb{E}[\varphi(X + Y)]$ et en déduire la loi de $X + Y$.

5. Calculer $\mathbb{E}[(X + Y)^2]$.

Un exercice au choix parmi :

Exercice 4 `(5 points)`

En fonction des paramètres $(\alpha, \beta) \in]1, +\infty[^2$, déterminer les points critiques et étudier la nature des extrémas locaux de la fonction définie pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par

$$f(x, y) = \frac{x^2}{\alpha^2 - 1} + \frac{2xy}{\alpha\beta - 1} + \frac{y^2}{\beta^2 - 1}.$$

Exercice 5 (5 points)
On considère un marché complet sur lequel il y a absence d'opportunité d'arbitrage (AOA). On note B_t le prix de l'actif sans risque à la date t qui rapporte 1 à la date T. On note par ailleurs C_t (respectivement P_t) le prix à la date t d'une option d'achat, aussi appelée call, (resp. de vente, aussi appelée put) sur l'actif risqué sous-jacent S de maturité T et de strike K. On note par la suite : $(\cdot)^+ = \max(\cdot; 0)$.

1. Montrer par un raisonnement d'arbitrage que :

$$(S_0 - K \cdot B_0)^+ \leq C_0 \leq S_0$$

   En deduire que

$$(K \cdot B_0 - S_0)^+ \leq P_0 \leq K \cdot B_0$$

2. Comment se comporte le prix de l'option d'achat (call) en fonction du strike K ? Et en fonction de la maturité T ?
   (*On suppose que le taux sans risque est strictement positif et donc que* $B_0 < 1$).

On considère maintenant les prix suivants :

- L'actif sans risque B vaut 100 à $t = 0$ et 105 à $t = T$.
- L'actif risqué S vaut 100 à $t = 0$. À $t = T$ son prix a une probabilité $p = 0{,}9$ de monter à 110 et une probabilité $1 - p = 0{,}1$ de descendre à 90.

3. Rappeler la définition de la probabilité neutre au risque associée à ce marché et la calculer.

4. Calculer le prix d'une option d'achat sur l'actif risqué sous-jacent S de maturité T et de strike $K = 100$. Idem pour le prix d'un put similaire (sous-jacent S, maturité T, strike $K = 100$). Dans les deux cas, on considère des options à la monnaie à $t = 0$.

On considère deux obligations de nominal 100 et d'une maturité de 8 ans. La première obligation paie un coupon annuel de 1 alors la seconde est une obligation zéro-coupon. Les deux obligations ont le même taux de rendement actuariel.

5. (a) Laquelle de ces deux obligations a la duration la plus longue et pourquoi ?

   (b) En cas de remontée des taux, laquelle de ces deux obligations va se déprécier davantage et pourquoi ?