MATHÉMATIQUES

Documents, calculatrices et téléphones portables interdits

2023

Concours cadre de direction

Les exercices 1, 2 et 3 sont obligatoires.
Les candidats ont le choix entre les exercices 4 et 5.
Les exercices sont indépendants.
Il est demandé aux candidats de justifier les calculs dans les exercices 2 à 5.
Il sera tenu compte de la rédaction de la copie.

Exercice 1 `(5 points)`

Une seule réponse est correcte parmi les quatre réponses proposées.

Question n° 1 : Que peut-on dire d'une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ qui vérifie $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_n = 1$?

- **A.** La suite n'admet pas de limite finie quand n tend vers $+\infty$.
- **B.** La suite a pour terme général $u_n = \frac{1}{n}$.
- **C.** Pour $N \in \mathbb{N}$ suffisamment grand, la suite $(u_n)_{n\geq N}$ est strictement décroissante vers 0.
- **D.** Pour $N \in \mathbb{N}$ suffisamment grand, $u_n > 0$, pour tout $n \geq N$.

Question n° 2 : Combien de fois la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 12x^4 - 14x^3 - 3x^2 - 1$ s'annule-t-elle sur $\mathbb{R}$?

- **A.** 1 fois.
- **B.** 2 fois.
- **C.** 3 fois.
- **D.** 4 fois.

Question n° 3 : Quelle est la valeur de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 e^{\sqrt{x}}dx$?

- **A.** $I = 0$.
- **B.** $I = 2$.
- **C.** $I = \sqrt{e}$.
- **D.** $I = e$.

Question n° 4 : On considère un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$, de dimension finie $n \geq 1$. Deux applications linéaires u et v de E sur E sont telles que $u \circ v = 0$. Parmi les propositions suivantes, laquelle est vraie ?

- **A.** On ne peut rien dire de général sur $\mathrm{rg}\,(u) + \mathrm{rg}\,(v)$.
- **B.** On a $\mathrm{rg}\,(u) + \mathrm{rg}\,(v) = n + 1$.
- **C.** On a $\mathrm{rg}\,(u) + \mathrm{rg}\,(v) \geq n + 1$.
- **D.** On a $\mathrm{rg}\,(u) + \mathrm{rg}\,(v) \leq n$.

Question n° 5 : Une société fabriquant des téléphones portables admet qu'un appareil sur cent est défectueux à la sortie d'usine. Un test pour détecter un appareil défectueux est positif avec une probabilité $\frac{90}{100}$ quand l'appareil est effectivement défectueux, et avec une probabilité de $\frac{10}{100}$ lorsque l'appareil est en fait en état de marche. Quelle est la probabilité qu'un appareil soit défectueux sachant que son test est positif ?

A. Cette probabilité est $\frac{1}{10}$.
B. Cette probabilité est $\frac{9}{10}$.
C. Cette probabilité est $\frac{1}{12}$.
D. Cette probabilité est $\frac{1}{2}$.

Exercice 2 `(5 points)`

On considère $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 2 sur $\mathbb{R}$ avec la base canonique :
$\{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

On fixe une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, non scalaire, *i.e.* différente de αI_2, $\alpha \in \mathbb{R}$
et on considère l'application φ définie pour tout $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ par $\varphi(M) = AM - MA$.

1. Vérifier que φ est un endomorphisme. Donner sa matrice dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Donner la dimension et une base du noyau de φ ainsi que le rang de φ.

3. On suppose que A est diagonalisable et on note P la matrice de passage telle que $A = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, avec $\lambda_1,\ \lambda_2 \in \mathbb{C}$.
   Pour $1 \leq i, j \leq 2$, on pose $V_{ij} = PE_{ij}P^{-1}$, $1 \leq i, j \leq 2$, calculer $\varphi(V_{ij})$.
   Montrer que φ est diagonalisable et donner ses valeurs propres.

Exercice 3 `(5 points)`

On suppose que pour une famille de $n \geq 2$ enfants, les sexes des enfants successifs sont mutuellement indépendants et que, à chaque naissance, la probabilité d'avoir une fille est égale à $\frac{1}{2}$.
On note les enfants dans l'ordre de naissance par un n-uplet $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ où le i-ième enfant est une fille ou un garçon : $e_i \in \{f, g\}$.
L'espace des observables (ou univers) s'écrit alors $\Omega = \{(e_1, \ldots, e_n) \,/\, e_i \in \{f, g\}, 1 \leq i \leq n\}$.
On considère les événements
$E_1 =$*"il y aura au plus une fille dans la famille"* et $E_2 =$*"il y aura des enfants des deux sexes"*
et l'on s'intéresse à leur indépendance.

1. Décrire en français l'événement $E_1 \cap E_2$.

2. Dans le cas $n = 2$, préciser les ensembles E_1 et E_2.
   Calculer $P(E_1), P(E_2)$ et $P(E_1 \cap E_2)$.
   Déduire que les événements E_1 et E_2 ne sont pas indépendants.

3. Dans le cas $n = 3$, préciser les ensembles E_1 et E_2.
   Calculer $P(E_1), P(E_2)$ et $P(E_1 \cap E_2)$. Que peut-on dire de l'indépendance de E_1 et E_2 ?

4. Que peut-on dire de l'indépendance de E_1 et E_2 dans le cas général ? discuter en fonction de $n \geq 2$.
   (Valeur numérique utile $\frac{\ln(\ln 2)}{\ln 2} = \mathrm{Log}_2(\ln 2) \approx -0.53$.)

Un exercice au choix parmi :

Exercice 4 `(5 points)`

Pour $x \in]0, +\infty[$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2 + x}\, dt$.

1. Montrer que la fonction F est définie sur $]0, +\infty[$.

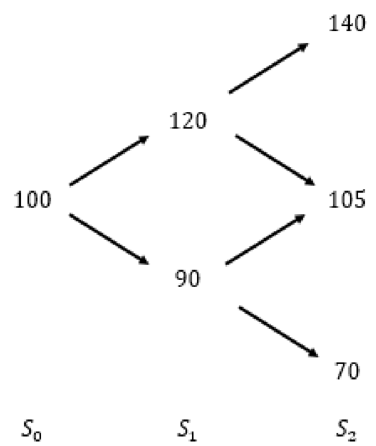
2. Montrer que la fonction F est continue sur $[a, +\infty[$, pour tout réel $a > 0$.
   En déduire que F est continue sur $]0, +\infty[$,

3. Déterminer la valeur de $F(1)$. (Indic. : on pourra poser $u = 1/t$)

4. En déduire la valeur de $F(x)$ pour $x > 0$.

Exercice 5 `(5 points)`

Cet exercice est constitué de deux parties indépendantes.
On considère un marché à deux périodes sur lesquels sont négociés deux actifs : un actif sans risque dont le prix à la date t est noté B_t, et un actif risqué dont le prix S_t évolue suivant l'arbre suivant :



L'actif sans risque rapporte le taux sans risque $r = 5\%$ par période.

1. Quels sont les quatre scénarios possibles de l'évolution de l'actif risqué sur les deux périodes ?
2. On note p_1, p_2, p_3 et p_4 les probabilités associées à ces quatre scénarios. Exprimer $E(S_2|S_1 = 120)$ et $E(S_2|S_1 = 90)$ en fonction des p_i, $1 \leq i \leq 4$.
3. Ce modèle est-il sans arbitrage ? Si oui, donner les probabilités risque-neutres. Ce modèle est-il complet ?

On considère à présent que l'on emprunte un capital N pour une durée de 3 ans. Deux modalités d'emprunt à taux fixe sont proposées :

— Emprunt *in fine* - paiement des intérêts tous les ans et remboursement du capital à la maturité du prêt ;

— Emprunt *Zéro Coupon* - un seul paiement à la maturité du prêt correspondant au remboursement du capital et au versement des intérêts pour la durée du prêt ;

On note r le taux d'intérêt de l'emprunt pour les deux modalités ($r > 0$). On note également à la date t : F_t le flux de remboursement de l'emprunteur au prêteur, I_t la part d'intérêts, A_t la part de remboursement du capital et CRD_t le capital restant dû.

4. Construire les tableaux d'amortissement précisant pour chaque date les montants F_t, I_t, A_t et CRD_t pour ces deux emprunts.
5. Comparer le coût total de l'emprunt pour chacune des deux modalités : lequel est le moins onéreux ?