Modèle CBDF EXATECH

17 / 20

Cache de direction 2024 - MS

Date 28/09/2024 Feuillet 01/02

Exercice n° 1 :

1. Réponse D.

2. Réponse B.

3. Réponse C.

4. Réponse B.

5. Réponse D.

Exercice n° 2 :

1. (a) i. Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont telles que $AB - BA \overset{(*)}{=} A$ et A est inversible, alors, notant $P_B(X)$ le polynôme caractéristique associé à B, on a :

$$\boxed{P_B(X) =} \det(B - XI_n) = \det(A(B - XI_n)A^{-1})$$

$$= \det((AB - XAI_n)A^{-1})$$

$$\overset{(*)}{=} \det((BA + A - XAI_n)A^{-1})$$

$$= \det(B + I_n - XI_n) \boxed{= P_{B+I_n}(X)}$$

NE RIEN ECRIRE DANS CE CADRE

ii. Pour tout $k \geq 0$, on a :

$$\begin{aligned} P_B(k+1) &= \det(B - (k+1) I_n) \\ &= \det(B - I_n - k I_n) \\ &= P_{B-I_n}(k) \\ &= P_{B-I_n+I_n}(k) = P_B(k) \text{ d'après i.} \end{aligned}$$

Par récurrence, $\boxed{\text{pour tout } k \geq 1,\ P_B(k) = P_B(0)}$.

Par conséquent, le polynôme $P_B(X) - P_B(0)$ admet tout entier naturel pour racine, soit une infinité de racines. C'est donc le polynôme nul, i.e $\boxed{P_B(X) = P_B(0) \text{. est constant}}$

iii. On sait que le polynôme caractéristique associé à une matrice de taille $n \geq 1$ est de degré n et de coefficient dominant 1. Ainsi, $P_B(X)$ ne peut être constant.

Donc, si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont telles que $AB - BA = A$, $\boxed{\text{la matrice } A \text{ ne peut être inversible}}$.

(b) La matrice A n'est pas inversible, donc il existe $x \in (\mathbb{R}^n)^*$ tel que $x \in \operatorname{Ker} A$, i.e $Ax = 0$, i.e $\boxed{0 \text{ est valeur propre}}$ associée au vecteur propre x.

Or, pour un tel x,

$$AB x \overset{(*)}{=} (BA + A)x = 0 + 0 = 0$$

donc Bx est également vecteur propre pour la valeur propre 0.

Ainsi, $\boxed{E_A(0) \text{ est stable par } B}$

(c) $E_A(0)$ est un sous-espace vectoriel non nul de $\mathbb{R}^n$ stable par B. Ainsi, l'endomorphisme $\hat{B}$ de $\mathbb{R}^n$ associé à B dans la base canonique admet une restriction $\hat{B}_{|E_A(0)}$ qui est un endomorphisme de $E_A(0)$.

Or, en dimension finie, tout endomorphisme admet au moins une valeur propre dans $\mathbb{C}$, associée à un vecteur propre non nul (par exemple, par application du théorème fondamental de l'algèbre au polynôme caractéristique).

Notant λ^* une telle valeur propre et x^* le vecteur propre associé, on a $Bx^* = \lambda^* x^*$ et $Ax^* = 0$,

i.e $\boxed{x^* \in E_A(0) \cap E_B(\lambda^*)}$

2. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB = BA$.

On sait que A admet au moins une valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$.

Alors, pour tout $x \in E_A(\lambda)$, on a :

$$ABx = BAx = \lambda Bx.$$

i.e, $Bx \in E_A(\lambda)$, donc $E_A(\lambda)$ est stable par B.

Appliquant le même raisonnement qu'en 1. (c), on en déduit que A et B ont au moins un vecteur propre en commun.

<u>Exercice n° 3 :</u>

1. Pour $1 \leq i < j \leq n$, on remarque que $X_i X_j = 1$ si X_i et X_j sont de même signe, $X_i X_j = -1$ sinon.

Ainsi,

$$\mathbb{E}[X_i X_j] = \frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{2} \times (-1) = 0.$$

On en déduit que :

$$\boxed{\mathbb{E}\left[\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)^2\right]} = \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{n} X_k^2\right] + 2\,\mathbb{E}\left[\sum_{1 \leq i < j \leq n} X_i X_j\right]$$

$$= n + 0$$

$$\boxed{= n.}$$

Modèle CBDF ©EXATECH

N° Inscription 10609

Né(e) le 07 / 05 / 1997

Signature

Nom PARPAiS

Prénom (s) LEO

17 / 20

BANQUE DE FRANCE

EUROSYSTÈME

Concours / Épreuve Cadre de direction 2024 - MS

Date 28/09/2024 Feuillet 02 / 02

2. Notant $Z := \sum_{k=1}^{n} X_k$, on applique l'inégalité de Markov à $Z^2 \geq 0$ et $(\alpha n)^2$:

$$\boxed{\mathbb{P}(|Z| \geq \alpha n)} = \mathbb{P}(Z^2 \geq (\alpha n)^2)$$

$$\leq \frac{\mathbb{E}(Z^2)}{(\alpha n)^2} \boxed{= \frac{1}{\alpha^2 n}} \text{ d'après 1.}$$

3. On définit la variable aléatoire $K = \#\{1 \leq k \leq n \,/\, X_k = 1\}$, où le symbole $\#$ désigne le cardinal, et on remarque que K suit une loi binomiale de paramètres n et $\frac{1}{2}$, de sorte que $\mathbb{P}(K = p) = \frac{1}{2^n}\binom{n}{p}$ pour tout $0 \leq p \leq n$.

Par ailleurs, on observe que :

$$|X_1 + X_2 + \dots + X_n| = \Big|\sum_{\substack{k=1 \\ X_k = 1}}^{n} 1 - \sum_{\substack{k=1 \\ X_k = -1}}^{n} 1\Big|$$

$$= |K - (n - K)|$$

$$= |2K - n| = |n - 2K|.$$

NE RIEN ECRIRE DANS CE CADRE

Ainsi, selon la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements $\{K=0\}, \{K=1\}, \dots \{K=n\}$:

$$\boxed{\mathbb{P}(|X_1+X_2+\dots+X_n| \geq \alpha n)} = \mathbb{P}(|n-2K| \geq \alpha n)$$

$$= \sum_{p=0}^{n} \mathbb{P}(K=p)\,\mathbb{P}(|n-2K| \geq \alpha n \mid K=p)$$

$$= \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{2^n}\binom{n}{p}\mathbb{P}(|n-2p| \geq \alpha n)$$

$$\boxed{= \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{2^n}\binom{n}{p}\mathbb{1}_{\{p / |n-2p| \geq \alpha n\}}(p)}$$

4. On déduit de 2. et 3. que :

$$0 \leq \frac{1}{2^n}\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}\mathbb{1}_{\{p/|n-2p|\geq \alpha n\}}(p) \leq \frac{1}{\alpha^2 n} \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Donc, par encadrement,

$$\boxed{\frac{1}{2^n}\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}\mathbb{1}_{\{p/|n-2p|\geq \alpha n\}}(p) \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0.}$$

Exercice n° 4 :

1. On commence par étudier les points critiques de f sur l'axe $\{y = 0\}$. On note $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ les dérivées partielle de f et ∇f son gradient.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 4x^3 - 2x - 2\alpha y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 4x^3 - 2y - 2\alpha x.$$

De sorte que : $y = 0$ et $\nabla f(x, y) = 0$

$$\iff 4x^3 - 2x = 0 \text{ et } 4x^3 - 2\alpha x = 0$$

$$\iff 4x^3 - 2x = 0 \text{ et } (1 - \alpha) x = 0$$

$$\iff x = 0 \text{ ou } (\alpha = 1 \text{ et } 2x^2 - 1 = 0)$$

$$\iff x = 0 \text{ ou } \left(\alpha = 1 \text{ et } x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Sur $\mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}_+ \times \{0\})$, on pose le changement de variable polaire $\varphi : (r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times]0, 2\pi[\mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta)$ et on définit $g = f \circ \varphi$. On remarque que la matrice jacobienne de φ est inversible sur l'ensemble de son domaine, de sorte que les points critiques de g sont les images par φ des points critiques de f.

En utilisant l'identité remarquable $2\cos\theta \sin\theta = \sin(2\theta)$

et en développant $Re((\cos\theta + i\sin\theta)^4) = \cos^4\theta + \sin^4\theta - 6\cos^2\theta \sin^2\theta$,

de sorte que $\cos^4\theta + \sin^4\theta = \cos(4\theta) + 3\sin^2(2\theta)$

$$= \cos(4\theta) + 3\left(\frac{1-\cos 2\theta}{2}\right),$$

on remarque que :

$$g(x,y) = r^4(\cos^4\theta + \sin^4\theta) - r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)$$
$$- 2\alpha r^2 \cos\theta \sin\theta$$

$$= r^4\left(\cos(4\theta) + \frac{3}{2} - \frac{3}{2}\cos 2\theta\right) - \left(1 + \sin(2\theta)\right).$$