

2025

Concours Cadre de direction

Les exercices 1, 2 et 3 sont obligatoires.

Les candidats ont le choix entre les exercices 4 et 5.

Les exercices sont indépendants.

Il est demandé aux candidats de justifier les calculs dans les exercices 2 à 5.

Il sera tenu compte de la rédaction de la copie.

Exercice 1 (5 points)

Une seule réponse est correcte parmi les quatre réponses proposées.

Question n° 1 : Soit la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ donnée par récurrence par $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$ et $u_0 \in]0, 2[$.
Parmi les propositions suivantes, laquelle est vraie ?

- A. La suite tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.
- B. La suite tend vers $\sqrt{2}$ quand n tend vers $+\infty$.
- C. La suite tend vers 2 quand n tend vers $+\infty$.
- D. La suite est divergente.

Question n° 2 : Soit la matrice A donnée par $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Parmi les propositions suivantes, laquelle est vraie ?

- A. Le noyau de A^6 est de dimension 1.
- B. Le noyau de A^6 est de dimension 2.
- C. Le noyau de A^6 est de dimension 3.
- D. Le noyau de A^6 est de dimension 4.

Question n° 3 : On considère un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$, de dimension finie $n \geq 2$. Soit u une application linéaire de E sur E telle que $u \circ u = 0$.
Parmi les propositions suivantes, laquelle est vraie ?

- A. On a toujours $\text{rg}(u) = 0$.
- B. On a toujours $\text{rg}(u) = n$.
- C. On a toujours $\text{rg}(u) \leq \frac{n}{2}$.
- D. Aucune des propositions ci-dessus.

Question n° 4 : Une urne contient 3 boules : une rouge, une verte et une bleue. On effectue trois tirages successifs avec remise et l'on suppose les tirages équiprobables et indépendants. Quelle est la probabilité que les deux premiers tirages donnent la même couleur et le troisième tirage donne une couleur différente ?

- A. Cette probabilité est $\frac{1}{27}$.
- B. Cette probabilité est $\frac{1}{9}$.
- C. Cette probabilité est $\frac{2}{27}$.
- D. Cette probabilité est $\frac{2}{9}$.

Question n° 5 : On suppose que le temps d'attente en caisse d'un supermarché, exprimé en minutes, est une variable aléatoire X de densité de probabilité donnée par la fonction

$$f(x) = \begin{cases} xe^{-x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}. \text{ Quel est le temps moyen d'attente ?}$$

- A. Le temps moyen d'attente est de 2 minutes.
- B. Le temps moyen d'attente est de 4 minutes.
- C. Le temps moyen d'attente est de 6 minutes.
- D. Aucune des possibilités ci-dessus.

Exercice 2 (5 points)

Soit β un paramètre réel fixé, on définit la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par

$$a_0 = 1 \text{ et } a_n = \frac{1}{(n!)^2} \prod_{k=0}^{n-1} (\beta + k), \text{ pour } n \geq 1.$$

1. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$.

Dans la suite, on définit pour tout $x \in]-R, R[$, la fonction $f_\beta(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

2. Montrer que si $p \in \mathbb{N}$, f_{-p} est une fonction polynomiale. Donner le degré du polynôme et le coefficient du terme de plus haut degré.
3. Montrer qu'il existe une unique fonction $x \mapsto y(x)$ développable en série entière, de rayon de convergence non nul et solution du problème

$$\begin{cases} xy''(x) + (1-x)y'(x) - \beta y(x) &= 0 \\ y(0) &= 1 \end{cases} \quad (L)$$

Exprimer cette solution en fonction de f_β .

4. Exprimer f_{-2} , f_{-1} , f_0 , f_1 et f_2 à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 3 (5 points)

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi de Bernoulli de paramètre p , $0 < p < 1$. On pose, pour tout $n \geq 1$, $Y_n = X_n X_{n+1}$ et $Z_n = Y_1 + \dots + Y_n$.

1. Quelle est la loi de Y_n ? Calculer la covariance $\text{cov}(Y_n, Y_m)$, $1 \leq n < m$.
2. Montrer que $\frac{1}{n} Z_n$ converge en moyenne quadratique vers p^2 .

Un exercice au choix parmi :

Exercice 4 (5 points)

On note $\mathbb{R}_k[X]$ l'espace vectoriel des polynômes réels de degré au plus $k \in \mathbb{N}$. On considère une suite de polynômes à coefficients réels $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$, définie par les relations :

$$P_0(X) = 2, P_1(X) = X + \frac{1}{2} \text{ et, pour } n \geq 2, 16P_n(X) - 8(2X + 1)P_{n-1}(X) + P_{n-2}(X) = 0 \quad (*)$$

1. Calculer $P_2(X)$ et $P_3(X)$.
2. Déterminer le degré du polynôme P_n . Donner le coefficient du terme de plus haut degré de P_n .
3. Établir, pour tout entier naturel n que $P_n(X) = (-1)^n P_n(-X - 1)$.
En déduire qu'il existe une solution réelle commune à tous les polynômes $P_{2n+1}(X)$, $n \geq 0$.
4. Pour $n \geq 2$, on considère la relation de récurrence linéaire

$$16r_n(x) - 8(2x + 1)r_{n-1}(x) + r_{n-2}(x) = 0 \quad (**)$$

avec $r_n : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

- (a) Déterminer toutes les solutions de cette récurrence qui sont de la forme $r_n(x) = u(x)^n$, pour $n \geq 2$. Préciser le domaine de définition D .
- (b) Montrer que la solution générale de $(**)$ s'écrit $r_n(x) = \alpha u(x)^n + \beta v(x)^n$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
- (c) Déduire une nouvelle expression pour le polynôme $P_n(X)$.

Exercice 5 (5 points)

Cet exercice est constitué de deux parties indépendantes.

On considère l'emprunt d'un capital N sur n périodes selon deux modalités : soit via un emprunt à intérêts simples, c'est-à-dire que les intérêts sont calculés à chaque période sur la base de la somme empruntée à l'origine, soit via un emprunt à intérêts composés, c'est-à-dire que les intérêts s'ajoutent au capital emprunté à la fin de chaque période pour former la base de calcul des intérêts pour la période suivante. Dans le cas d'un emprunt à intérêts composés, le montant des intérêts et le capital changent donc à chaque période.

Dans cette première partie de l'exercice, intérêts et capital seront toujours remboursés et payés à échéance, c'est-à-dire à la fin des n périodes. On note r_s le taux d'intérêt simple et r_c le taux d'intérêt composé.

1. Quel est le montant dû si les intérêts sont simples ? Et si les intérêts sont composés ?
2. On suppose que l'on peut emprunter ou prêter selon les deux modalités. À l'aide d'un raisonnement par absence d'opportunité d'arbitrage (AOA), déterminer la relation entre r_s et r_c .
3. On considère un emprunt de $N = 10\,000\text{€}$. Deux modalités sont proposées : un emprunt au taux mensuel simple de 0,51% et un emprunt au taux annuel composé de 6,00%.
 - (a) Sur une durée de 1 an : quel est le prêt le plus avantageux (*i.e.* le moins onéreux) et pourquoi ?
 - (b) Même question, mais sur une durée de 2 ans.

On considère à présent un marché complet sur lequel il y a absence d'opportunité d'arbitrage (AOA). On note B_t le prix de l'actif sans risque à la date t qui rapporte 1 à la date T . On note par ailleurs C_t (respectivement P_t) le prix à la date t d'une option d'achat, aussi appelée call, (resp. de vente, aussi appelée put) sur l'actif risqué sous-jacent S de maturité T et de strike K . On note par la suite : $(\bullet)^+ = \max(\bullet, 0)$. Les pay-offs des deux options sont : $C_t = (S_T - K)^+$ et $P_t = (S_T - K)^+$.

4. Pour une date $0 \leq t \leq T$, déterminer la relation entre le prix du call et le prix du put.