MATHÉMATIQUES
Épreuve de spécialisation

A.D. 2013
Concours externe et interne

Documents, calculatrices et téléphones portables interdits

Les exercices I et II sont obligatoires.
Les candidats ont le choix entre les exercices III et IV.
Les exercices sont indépendants.
Il est demandé aux candidats de justifier les calculs.
Il sera tenu compte de la rédaction de la copie.

Exercice I `(8 points)`

Soit E un espace vectoriel, de dimension finie, sur $\mathbb{C}$. On note $L(E)$ l'ensemble des endomorphismes sur E, id_E l'application identité sur E, O l'application nulle sur E et $\circ$ la loi de composition des applications.
Pour $v \in L(E)$, on note $\mathrm{Ker}\,(v)$ le noyau de v, $\mathrm{Im}\,(v)$ l'image de v.
Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note $v^k = v \circ v \circ \cdots \circ v$ (k fois) et l'on pose $v^0 = id_E$.
Soit $u \in L(E)$, on suppose qu'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$, $\alpha \neq \beta$ et p et q des éléments non nuls de $L(E)$ tels que

$$u = \alpha\, p + \beta\, q\ , \quad u^2 = \alpha^2\, p + \beta^2\, q \quad \text{ et } \quad p + q = id_E\ .$$

1. Calculer $(u - \alpha\, id_E) \circ (u - \beta\, id_E)$.

2. Montrer que $p \circ q = q \circ p = O$, $p^2 = p$ et $q^2 = q$.
   En déduire que p et q sont des projections et que $\mathrm{Im}\,(p) = \mathrm{Ker}\,(q)$ et $\mathrm{Im}\,(q) = \mathrm{Ker}\,(p)$.

3. Montrer que p est la projection sur $\mathrm{Ker}\,(u - \alpha\, id_E)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}\,(u - \beta\, id_E)$ et que q est la projection sur $\mathrm{Ker}\,(u - \beta\, id_E)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}\,(u - \alpha\, id_E)$.

4. Montrer que $E = \mathrm{Ker}\,(u - \alpha\, id_E) \oplus \mathrm{Ker}\,(u - \beta\, id_E)$.

5. Montrer que u est diagonalisable et que α et β sont les deux valeurs propres.

6. Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}$, $u^m = \alpha^m\, p + \beta^m\, q$.

Exercice II `(7 points)`

Pour $x \in \mathbb{R}$ on pose $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ où $u_n(x) = \dfrac{x}{(1+nx^2)^n}$.

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$.

2. Déterminer $\sup_{x\in\mathbb{R}} |u_n(x)|$, pour $n \in \mathbb{N}^*$.
   En déduire que la série de fonctions $\sum u_n(x)$ n'est pas normalement convergente sur $\mathbb{R}$.

3. Pour $x \in \mathbb{R}^*$ donné, montrer qu'il existe $D \subset \mathbb{R}^*$ avec $x \in D$
   tel que la série $\sum u_n(x)$ soit normalement convergente sur D.

4. Soit $p \in \mathbb{N}^*$, montrer que pour tout entier $n \in \{1, \ldots, p\}$: $\left(1 + \dfrac{1}{p}\right)^p \geq \left(1 + \dfrac{n}{p^2}\right)^n$.

   En déduire que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $f\left(\dfrac{1}{p}\right) \geq \left(1 + \dfrac{1}{p}\right)^{-p}$.

5. En déduire que la série $\sum u_n(x)$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$.

Un exercice au choix parmi :

Exercice III `(5 points)`

À quelle(s) condition(s) sur les réels a, b, c et d, les matrices suivantes sont-elles diagonalisables ?

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1/a & 1/a^2 \\ a & 0 & 1/a \\ a^2 & a & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 \\ 1 & c & d \end{pmatrix}$$

Exercice IV `(5 points)`

On a deux urnes : dans l'urne A il y a quatre boules noires et deux boules blanches ;
dans l'urne B il y a deux boules noires et quatre boules blanches.
Un joueur choisit au hasard l'une des deux urnes et décide d'effectuer par la suite tous les tirages (avec remise) dans l'urne choisie.
On note N_n l'évènement «la n-ième boule tirée est noire».

1. Calculer $P(N_n)$, pour $n \in \mathbb{N}^*$, et $P(N_1 \cap N_2)$.

2. Sachant que les n premières boules tirées sont noires, quelle est la probabilité que le tirage a été effectué dans l'urne A ? Que se passe-t-il quand n tend vers l'infini ?