MATHÉMATIQUES
Épreuve de spécialisation

A.D. 2014
Concours externe et interne

Documents, calculatrices et téléphones portables interdits

Les exercices I et II sont obligatoires.
Les candidats ont le choix entre les exercices III et IV.
Les exercices sont indépendants.
Il est demandé aux candidats de justifier les calculs.
Il sera tenu compte de la rédaction de la copie.

Exercice I (9 points)
Les questions 1 et 2 de cet exercice sont indépendantes.

1. Déterminer le rayon de convergence R et la somme $S(x)$, pour $|x| < R$, de la série entière de terme général $u_n(x) = n^{(-1)^n} x^n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n le nombre de partitions d'un ensemble de cardinal n. On pose $B_0 = 1$.

   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $B_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} C_n^k B_k$. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B_n \leq n!$.

   (b) On pose $f(x) = \displaystyle\sum_{k\geq 0} \frac{B_k}{k!} x^k$. Montrer que cette série entière a un rayon de convergence au moins égal à 1.

   (c) Déterminer une équation différentielle vérifiée par f et en déduire f.

   (d) Grâce au développement en série entière de f, donner une nouvelle expression pour B_n.

   (Indic. : on rappelle que dans les disques de convergence $(\sum_{k\geq 0} a_k x^k)(\sum_{k\geq 0} b_k x^k) = \sum_{k\geq 0} c_k x^k$ *où* $c_k = \sum_{p=0}^{k} a_p b_{k-p}$ *et* $\sum_{k\geq 0}\sum_{n\geq 0} \alpha_k \beta_n x^n = \sum_{n\geq 0}\sum_{k\geq 0} \alpha_k \beta_n x^n$ *)*

Exercice II (7 points)
Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie $n \geq 1$, $\mathcal{L}(E)$ est l'ensemble des endomorphismes de E. Pour $u \in \mathcal{L}(E)$, $k \in \mathbb{N}^*$, $u^k = u \circ u \circ \ldots \circ u$ (k fois) et on pose $u^0 = Id_E$, avec Id_E l'application identique de E. Le vecteur nul de E est noté 0_E.
Pour $u \in \mathcal{L}(E)$, $x \in E$, on note $V_u(x)$ le sous-espace vectoriel de E engendré par la famille de vecteurs $\{u^k(x), k \in \mathbb{N}\}$.

1. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $x \in E$.
   (a) Montrer que $V_u(x)$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E qui contient x et qui est stable par u.

   (b) Pour $x \in E \setminus \{0_E\}$, on pose $p = \dim V_u(x)$.
   Montrer que $p \geq 1$ et que $\{u^k(x), 0 \leq k \leq p-1\}$ est une base de $V_u(x)$.
   Que peut-on dire si $p = \dim V_u(x) = 1$?

2. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, on suppose qu'il existe $y \in E$ tel que $\mathcal{B} = \{u^k(y), 0 \leq k \leq n-1\}$ soit une base E.
   (a) Montrer que $V_u(y) = E$. On dit que u est cyclique.

   (b) Montrer que $\{u^k, 0 \leq k \leq n-1\}$ est une partie libre de $\mathcal{L}(E)$.

   (c) Écrire la matrice de $u - \lambda I_E$ dans la base $\mathcal{B}$.
   En déduire que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\text{rang}(u - \lambda I_E) \geq n-1$.

   (d) En déduire que u est diagonalisable si et seulement si u admet n valeurs propres réelles distinctes.

Un exercice au choix parmi :

Exercice III (4 points)
Le plan $\mathbb{R}^2$ est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On fixe le point $A = (a, b)$ et on considère les points $M = (x, 0)$ et $N = (0, y)$, où a, b, x et y sont des nombres réels. On pose

$$C(x,y) = d(A,M)^2 + d(A,N)^2 + d(M,N)^2$$

où $d(.,.)$ désigne la distance euclidienne entre deux points de $\mathbb{R}^2$.

1. Écrire C en fonction de x et y.

2. Déterminer les extrema locaux de C.

3. Est-ce que C admet un minimum global ? maximum global ? Justifiez.

Exercice IV (4 points)
Soit X une variable aléatoire discrète, définie sur Ω et à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

1. Trouver les conditions sur $(a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2$, pour que $P(X = k) = \begin{cases} \dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b} & \text{si } 1 \leq k \leq ab \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

   définisse une loi de probabilité.

2. Tracer la fonction de répartition de X.

3. Calculer l'espérance $E(X)$.