MATHÉMATIQUES
Épreuve de spécialisation

2020
Concours Cadre de direction

Documents, calculatrices et téléphones portables interdits

Les exercices I et II sont obligatoires.
Les candidats ont le choix entre les exercices III et IV.
Les exercices sont indépendants.
Il est demandé aux candidats de justifier les calculs.
Il sera tenu compte de la rédaction de la copie.

Exercice I (9 points)

On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des suites décroissantes de nombres réels strictement positifs $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$, telles que la série $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ soit convergente.

Pour $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathcal{S}$, on note $U = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} U_n = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$, $U_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} u_k$, pour $n \geq 1$, $U_0 = 0$ et $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.

De plus, à tout réel $x \in [0, U]$, on associe la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$x_0 = 0 \qquad \text{et} \qquad x_{n+1} = \begin{cases} x_n + u_n & \text{si } x_n + u_n \leq x \\ x_n & \text{si } x_n + u_n > x \end{cases} \quad \text{pour } n \geq 0\,.$$

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{S}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq R_n$.
   Montrer par récurrence sur n que l'on a $\forall x \in [0, U]\,:\ 0 \leq x - x_n \leq u_n + R_n$.

2. Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{S}$ avec, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq R_n$, alors on a la propriété suivante :

$$\forall x \in [0, U], \text{il existe une suite } (d_n)_{n\in\mathbb{N}},\ \text{tel que } x = \sum_{n=0}^{+\infty} d_n u_n, \qquad (1)$$

   où la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $d_n = \begin{cases} 1 & \text{pour } x_n + u_n \leq x \\ 0 & \text{pour } x_n + u_n > x \end{cases}$
   Indication : étudier la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3. Vérifier que la suite de terme général $u_n = 2^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$, est un élément de $\mathcal{S}$. Calculer U et R_n. Montrer que cette suite vérifie (1). Pour $x = 1{,}1875$, construire les six premiers termes de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et en déduire la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

4. On considère la suite de terme général $u_n = \ln(1 + 2^{-n})$, $n \in \mathbb{N}$.
   4.1 Vérifier que cette suite est un élément de $\mathcal{S}$.
   4.2 Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la propriété (1).
   Indication : commencer par remarquer que $2^{-n} = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} 2^{-k}$ et démontrer que $\ln(1 + \alpha_1 + \alpha_2) \leq \ln(1 + \alpha_1) + \ln(1 + \alpha_2)$, pour $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}_+$.
   4.3 Montrer qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que, pour tout réel $x \in [0, U]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:
   $0 \leq (e^x - e^{x_n})/e^x \leq M$.
   4.4 Si $x_{n+1} \neq x_n$, par quelles opérations élémentaires obtient-on $e^{x_{n+1}}$ à partir de e^{x_n} ?

Exercice II `(7 points)`
Soit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées réelles d'ordre n. On dit que $\mathcal{G} \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un *groupe de matrices* si la multiplication des matrices est stable dans $\mathcal{G}$ et vérifie les axiomes de groupe sur $\mathcal{G}$.
On note E l'élément neutre dans $\mathcal{G}$ et, pour tout $X \in \mathcal{G}$, X^{inv} l'inverse de X dans $\mathcal{G}$.
On rappelle que le rang d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est la dimension du sous-espace vectoriel $\operatorname{Im} A = \{Ax \,/\, x \in \mathbb{R}^n\}$. Pour tout A, B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on admet : $rang(AB) \leq \min(rang(A), rang(B))$.
On note $\det(A)$ le déterminant de la matrice A. On commence par donner deux exemples de groupes de matrices $\mathcal{G}$.

1. Soit $\mathcal{G}_1 = \left\{ X = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \text{ \underline{ou} } X = \begin{pmatrix} 0 & x \\ y & 0 \end{pmatrix} \text{ , avec } x, y \in \mathbb{R}^* \right\}$.
   Montrer que $\mathcal{G}_1$ est un groupe de matrices, préciser E et l'inverse X^{inv} de $X \in \mathcal{G}_1$.
   Est-ce un groupe commutatif ? $\mathcal{G}_1$ est-il un sous groupe de $GL(2)$?

2. Soit $\mathcal{G}_2 = \left\{ X = \begin{pmatrix} x & x \\ x & x \end{pmatrix} \text{ , avec } x \in \mathbb{R}^* \right\}$.
   Montrer que $\mathcal{G}_2$ est un groupe de matrices, préciser E et l'inverse X^{inv} de $X \in \mathcal{G}_2$.
   Est-ce un groupe commutatif ? $\mathcal{G}_2$ est-il un sous groupe de $GL(2)$?

3. Soit $\mathcal{G}$ un groupe de matrices, montrer que soit, pour tout $A \in \mathcal{G}$, $\det(A) = 0$;
   soit, pour tout $A \in \mathcal{G}$, $\det(A) \neq 0$.

4. Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ne peut pas appartenir à un groupe de matrices.

5. Montrer que tous les éléments d'un groupe de matrices ont le même rang.

6. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ un élément d'un groupe de matrices $\mathcal{G}$. Montrer que $\operatorname{Im} A \cap \operatorname{Ker} A = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$, où l'on note $\operatorname{Ker} A$ le noyau de la matrice A.

Un exercice au choix parmi :

Exercice III `(4 points)`
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Discuter suivant la valeur de α la nature de la série de terme général :

$$u_n = \sqrt{1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha}} - 1 \,.$$

Exercice IV `(4 points)`
On considère un feu de circulation tricolore, dont le cycle de changement de couleurs est le suivant : le feu est vert sur l'intervalle $[0, v]$ et orange puis rouge sur l'intervalle $[v, v + r]$ avec $v, r \in \mathbb{R}_+^*$. L'instant d'arrivée U d'un automobiliste au feu tricolore est uniformément réparti sur $[0, v + r]$.

1. Exprimer en fonction de U le temps d'attente T de cet automobiliste au feu dans le cas où aucun véhicule ne le précède.
2. Montrer que si $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue bornée, alors
$$\mathbb{E}(\varphi(T)) = \frac{v}{v + r}\varphi(0) + \frac{1}{r + v}\int_0^r \varphi(x)dx.$$
3. Vérifier que $\mathbb{P}(T = 0) > 0$ et que pour tout $t \neq 0$, $\mathbb{P}(T = t) = 0$. Que peut-on dire de T ?