Exercice 1

Les réponses sont ici complétées par une justification qui n'est pas demandée

Question n° 1 : Soit la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ donnée par récurrence par $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$ et $u_0 \in]0,2[$.
Parmi les propositions suivantes, laquelle est vraie ?

C La suite tend vers 2 quand n tend vers $+\infty$.

En effet, en écrivant $l = \sqrt{2+l}$, ou encore $l^2 - l - 2 = 0$, on trouve comme point fixes -1 et 2.
Comme $u_0 \in]0,2[$, on a $u_1 \in]0,2[$ et par récurrence, $u_n \in]0,2[$ pour $n \geq 0$, la suite est donc bornée par 0 et 2.
On calcule $u_{n+1} - u_n = \sqrt{2+u_n} - u_n = \dfrac{2+u_n-u_n^2}{\sqrt{2+u_n}+u_n} > 0$ car $u_n \in]0,2[$. La suite est donc croissante bornée et converge vers 2.

Question n° 2 : Soit la matrice A donnée par $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Parmi les propositions suivantes, laquelle est vraie ?

D Le noyau de A^6 est de dimension 4.

En effet, $A^3 \neq O$ et $A^4 = O$, donc $\ker A = \mathbb{R}^4$.

Question n° 3 : On considère un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$, de dimension finie $n \geq 2$. Soit u une applications linéaire de E sur E telle que $u \circ u = 0$.
Parmi les propositions suivantes, laquelle est vraie ?

C On a toujours $\text{rg}\,(u) \leq \frac{n}{2}$.

En effet, $u \circ u = 0$ entraîne que $\text{Im}\, u \subset \ker u$, *i.e.* $\text{rg}\,(u) \leq \dim\ker(u))$. Avec $n = \text{rg}\,(u) + \dim(\ker u)$, on obtient $n \leq 2\dim(\ker u)$, ou encore $\frac{n}{2} \leq \dim(\ker u)$ et donc, comme $\text{rg}\,(u) = n - \dim(\ker u)$, $\text{rg}\,(u) \leq \frac{n}{2}$.

Question n° 4 : Une urne contient 3 boules : une rouge, une verte et une bleue. On effectue trois tirages successifs avec remise et l'on suppose les tirages équiprobables et indépendants. Quelle est la probabilité que les deux premiers tirages donnent la même couleur et le troisième tirage donne une couleur différente ?

D Cette probabilité est $\frac{2}{9}$.

En effet, si l'on note R_i, V_i et B_i quand la couleur rouge, vert ou bleu sort au i^{e} tirage, on a $p = \mathbb{P}(R_1 \cap R_2 \cap \overline{R_3}) + \mathbb{P}(V_1 \cap V_2 \cap \overline{V_3}) + \mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap \overline{B_3})$, donc $p = 3\left(\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{2}{3}\right) = \dfrac{2+2+2}{27} = \dfrac{2}{9}$

Question n° 5 : On suppose que le temps d'attente en caisse d'un supermarché, exprimé en minutes, est une variable aléatoire X de densité de probabilité donnée par la fonction $f(x) = \begin{cases} xe^{-x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. Quel est le temps moyen d'attente ?

A Le temps moyen d'attente est de 2 minutes.

En effet, on a

$$\mathbb{E}(X) = \int_{\mathbb{R}} xf(x)dx = \int_0^{+\infty} x^2e^{-x}dx = [-x^2e^{-x}]_0^{+\infty} + 2\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx$$

$$= 2\left([-xe^{-x}]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-x}dx\right) = 2[-e^{-x}]_0^{+\infty} = 2$$

Exercice 2

1. On distingue deux cas :

• Si $\beta \notin \mathbb{Z}_-$, alors pour tout $n \geq 0$, $a_n \neq 0$ et l'on peut appliquer le critère de d'Alembert :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\beta+n}{(n+1)^2} = 0$$

D'où $R = +\infty$.

• Si $\beta \in \mathbb{Z}_-$ on a $\beta = -p$ avec $p \in \mathbb{N}$. Alors $a_{p+1} = 0$ et pour tout $n \geq p+1$, $a_n = 0$.
Seul un nombre fini de termes est non nul, la série entière est en fait un polynôme de degré p, d'où $R = +\infty$.

• Dans tous les cas, la fonction f_β est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier et $R = +\infty$.

2. Comme constaté en 1, pour $\beta = -p$, on a $a_{p+1} = 0$ et $a_n = 0$ pour $n \geq p+1$.

Donc f_{-p} est un polynôme de degré p et $a_p = \dfrac{1}{(p!)^2}(-p)(-p+1)\dots(-2)(-1) = \dfrac{(-1)^p}{p!}$.

3. Posons $y(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$. Comme $y(0) = 1$ on a $b_0 = 1$.
De façon classique, on injecte la S.E. $\sum b_n x^n$ dans l'équation différentielle (L) :

$$x\sum_{n=2}^{+\infty} b_n n(n-1)x^{n-2} + (1-x)\sum_{n=1}^{+\infty} b_n n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \beta b_n x^n$$

En regroupant/changeant d'indices

$$b_1 + x\sum_{n=1}^{+\infty}[(n+1)^2 b_{n+1} - n b_n]x^n = \beta b_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \beta b_n x^n$$

on obtient les relations

$$b_1 = \beta b_0 = \beta$$

$$\text{et, pour } n \geq 1, b_{n+1} = \frac{n+\beta}{(n+1)^2} b_n = \dots = \frac{(n+\beta)(n-1+\beta)\cdots(1+\beta)}{(n+1)^2 n^2 \cdots 2^2} b_1 \,.$$

Or $b_1 = \beta = a_1$ et donc, pour tout $n \geq 0$, $b_n = a_n$ et $y(x) = f_\beta(x)$.
Donc f_β est l'unique solution D.S.E. de l'edo (L).

4. On a $a_0 = 1$, $a_1 = \beta$ et $a_2 = \frac{1}{4}\beta(\beta+1)$, d'où

$$f_{-2}(x) = 1 - 2x + \frac{1}{2}x^2, \quad f_{-1}(x) = 1 - x, \quad f_0(x) = 1.$$

Pour $\beta = 1$, on a $f_1(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(1+(n-2))\cdot(1+(n-1))}{(n!)^2} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$.

Pour $\beta = 2$, $a_n = \dfrac{1}{(n!)^2} 2\cdot 3\cdots n(n+1) = \dfrac{n+1}{n!}$, $n \geq 1$ et

$$f_2(x) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{n!}\right)x^n = xe^x + e^x = (1+x)e^x.$$

Exercice 3

1.

• Pour tout $n \geq 1$, la variable aléatoire Y_n ne prend que deux valeurs, 0 ou 1. C'est donc une variable de Bernoulli de paramètre

$$P(Y_n = 1) = P(X_n = 1 \text{ et } X_{n+1} = 1) = P(X_n = 1)P(X_{n+1} = 1) = p^2.$$

La variance de Y_n est donc égale à $p^2(1 - p^2)$.

• Calculons $\text{cov}(Y_n, Y_m)$, avec $1 \leq n < m$ et $Y_n = X_n X_{n+1}$.
Si $m > n + 1$, Y_n et Y_m sont des v.a. indépendantes et leur covariance est nulle.
Si $m = n + 1$, alors

$$\begin{aligned}
\text{cov}(Y_n, Y_{n+1}) &= \mathbb{E}[Y_n Y_{n+1}] - \mathbb{E}[Y_n]\mathbb{E}[Y_{n+1}] \\
&= \mathbb{E}[X_n X_{n+1}^2 X_{n+2}] - p^4 \\
&= \mathbb{E}[X_n]\mathbb{E}[X_{n+1}]\mathbb{E}[X_{n+2}] - p^4 \text{ par indépendance et } X_n^2 = X_n \\
&= p^3 - p^4
\end{aligned}$$

2. Remarquons d'abord que :

$$\mathbb{E}\left[\frac{1}{n}Z_n\right] = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}[Y_k] = p^2$$

On en déduit que :

$$\mathbb{E}\left[\left(\frac{1}{n}Z_n - p^2\right)^2\right] = \text{var}\left(\frac{1}{n}Z_n\right)$$

On a ainsi

$$\begin{aligned}
\text{var}\left(\frac{1}{n}Z_n\right) &= \frac{1}{n^2}\text{var}(Y_1 + \cdots + Y_n) \text{ (on développe de façon classique et utilise 1.)} \\
&= \frac{1}{n^2}(\text{var}(Y_1) + \cdots + \text{var}(Y_n)) + \frac{2}{n^2}(\text{cov}(Y_1, Y_2) + \text{cov}(Y_2, Y_3) + \cdots + \text{cov}(Y_{n-1}, Y_n)) \\
&= \frac{1}{n}p^2(1 - p^2) + \frac{2}{n^2}(n - 1)p^3(1 - p) \\
&= O\left(\frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

On en déduit que $\mathbb{E}\left[\left(\frac{1}{n}Z_n - p^2\right)^2\right]$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini, autrement dit que $\frac{1}{n}Z_n$ tend en moyenne quadratique vers p^2 .

Exercice 4

1. Pour $n = 2$, $16P_2(X) = 8(2X + 1)(X + 1/2) - 2$, d'où $P_2(X) = X^2 + X + \frac{1}{8}$.

Pour $n = 3$, $16P_3(X) = 8(2X + 1)\left(X^2 + X + \frac{1}{8}\right) - \left(X + \frac{1}{2}\right)$ et on obtient

$$P_3(X) = X^3 + \frac{3}{2}X^2 + \frac{9}{16}X + \frac{1}{32}.$$

2. On procède par récurrence : pour $n = 1, 2$ et 3, on vérifie que le degré de P_n est égal à n avec 1 comme coefficient du terme de plus haut degré.

   On suppose que pour $i = 1, 2, \ldots, n-1$, le degré de P_i est i et que le coefficient du terme dominant est 1.

   De $16P_n(X) = 8(2X+1)P_{n-1}(X) + P_{n-2}(X)$, on déduit que $16a_n = 16 \cdot 1$ et donc pour tout $n \geq 1$ le degré de P_n est n et le coefficient du terme de plus haut degré est 1.

3. On fait une démonstration par récurrence. Pour les premiers polynômes on a $P_0(-X-1) = 2 = P_0(X)$, $P_1(-X-1) = -X - 1/2 = -P_1(X)$,

   et $P_2(-X-1) = (-X-1)^2 - X - 1 + 1/8 = P_2(X)$. La relation est vérifiée.
   Pour $n \geq 3$, on a $(*)$ et $16P_n(-X-1) = 8(2X+1)P_{n-1}(-X-1) - P_{n-2}(-X-1) = 0$.

   Posons donc $D_n(X) = P_n(X) - (-1)^n P_n(-X-1)$, on a bien $D_0(X) = D_1(X) = D_2(X) = 0$

   et $16D_n(X) = 8(2X+1)D_{n-1}(X) - D_{n-2}(X)$, pour $n \geq 3$.

   Par récurrence simple on déduit $D_n(X) = 0$ et donc $P_n(X) = (-1)^n P_n(-X-1)$, $n \geq 0$.

   Comme $P_{2n+1}(X) + P_{2n+1}(-X-1) = 0$, on en déduit que pour $x = -x-1$, *i.e.* $x = -1/2$, on a $2P_{2n+1}(-1/2) = 0$. Donc $-1/2$ est racine de tous les polynômes de degré impair $P_{2n+1}(X)$.

4. (a) On remarque d'abord que la fonction constante nulle est solution triviale de $(**)$, soit donc $x \in \mathbb{R}$ tel que $u(x) \neq 0$, on obtient par $(**)$ que
   $$16\,u(x)^2 - 8(2x+1)\,u(x) + 1 = 0$$
   Le discriminant réduit vaut $64\,x(x+1)$ et est positif pour $x \leq -1$ ou $x \geq 0$. On en déduit les deux solutions
   $$u(x) = \frac{1}{4}((2x+1) + 2\sqrt{x(x+1)}) \text{ et } v(x) = \frac{1}{4}((2x+1) - 2\sqrt{x(x+1)})$$
   définies sur $D =]-\infty, -1] \cup [0, +\infty[$.

   (b) Les fonctions u et v sont définies sur D, ne s'annulent pas et sont linéairement indépendantes. Or les solutions de $(**)$ forment un e.v. de dimension 2, dont u et v sont une base.
   La solution générale s'écrit donc $r_n(x) = \alpha\,u(x)^n + \beta\,v(x)^n$, pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

   (c) Comme P_n vérifie la même relation de récurrence pour $n \geq 2$, il suffit de déterminer α et β de façon à obtenir P_0 et P_1, pour $n = 0$ et $n = 1$:
   $$r_0(x) = \alpha + \beta = P_0(x) = 2 \text{ et } r_1(x) = \alpha\,u(x) + \beta\,v(x) = P_1(x) = x + \frac{1}{2}$$
   On trouve $\alpha = \beta = 1$ *i.e.* $P_n(X) = u(x)^n + v(x)^n$.

Exercice 5

1. À l'échéance on doit
   — Si les intérêts sont simples : $N(1 + nr_s)$ (0,5 point)
   — Si les intérêts sont composés :
      — Pour $k \in [0:n]$ on note m_k le montant dû à chaque fin de période

— Pour $k = 0$, on a $m_0 = N$
— Pour $0 \leq k < n$, on a : $m_{k+1} = m_k(1 + r_c)$
— Par récurrence, on doit donc : $m_n = N\,(1 + r_c)^n$ (0,5 point)

2. Prouvons qu'en l'absence d'opportunité d'arbitrage (AOA), on a : $1 + nr_s = (1 + r_c)^n$
   — Supposons que $1 + nr_s < (1 + r_c)^n$ (1)
     — À l'instant $t = 0$, on peut alors emprunter N euros en intérêts simples et prêter N en intérêts composés.
     — À l'instant $t = n$, on reçoit alors le montant $N\,(1 + r_c)^n$ et on rembourse le montant $N(1 + nr_s)$
     — Le résultat financier de l'opération à l'instant $t = n$ est : $N[(1 + r_c)^n - (1 + nr_s)] > 0$
     — D'où la contradiction entre les hypothèses AOA et (1)
     — Par conséquent, $1 + nr_s \geq (1 + r_c)^n$
   — Supposons désormais que $1 + nr_s > (1 + r_c)^n$ (2)
     — À l'instant $t = 0$, on peut alors emprunter N euros en intérêts composés et prêter N en intérêts simples.
     — À l'instant $t = n$, on reçoit alors le montant $N(1 + nr_s)$ et on rembourse le montant $N\,(1 + r_c)^n$
     — Le résultat financier de l'opération à l'instant $t = n$ est : $N[(1 + nr_s) - (1 + r_c)^n] > 0$
     — D'où la contradiction entre les hypothèses AOA et (2)
     — Par conséquent, $1 + nr_s \leq (1 + r_c)^n$
   — En conclusion, sous l'hypothèse AOA on a : $1 + nr_s = (1 + r_c)^n$ (1 point)

3. Pour faciliter la comparaison, on s'intéresse aux taux d'intérêts équivalents annuels. Sous l'hypothèse AOA, on a le lien suivant entre les intérêts simples mensuels et les intérêts simples annuel : $r_s^{annuel} = 12 r_s^{mensuel} = 12 * 0,51 = 6,12$
   (a) Dans le premier cas, on a une période annuelle $n = 1$, $r_s^{annuel} = 6,12$, $r_c^{annuel} = 6,00$. On a donc : $1,0612 = 1 + nr_s^{annuel} > \left(1 + r_c^{annuel}\right)^n = 1,06$. Par conséquent, le prêt annuel au taux composé est moins onéreux. (0,5 point)
   (b) Dans le second cas, on a deux périodes annuelles $n = 2$, $r_s^{annuel} = 6,12$, $r_c^{annuel} = 6,00$. Cette fois ci, comme $1,1224 = 1 + nr_s^{annuel} < \left(1 + r_c^{annuel}\right)^n = 1,1236$, c'est le prêt mensuel à taux simple qui est le moins onéreux. (0,5 point)

4. Parité call-put
   On raisonne par arbitrage et on construit 2 portefeuilles distincts X et Y.

Ptf	Description	Prix à t	Prix à $t = T$
	Achat du put à t	P_t	$(K - S_T)^+$
X	Achat de l'actif risqué à t	S_t	S_T
	Valeur	$P_t + S_t$	$(K - S_T)^+ + S_T$
	Achat du call à t	C_t	$(S_T - K)^+$
Y	Achat de K actifs sans risques à t	$K * B_t$	K
	Valeur	$C_t + K * B_t$	$(S_T - K)^+ + K$

À l'échéance, $t = T$, on remarque que l'on a des flux financiers finaux égaux pour les deux portefeuilles X et Y. Par conséquent, par AOA on en déduit que la relation de parité call-put est vérifié pour tout $t \leq T$.

On a bien démontré que : $C_t - P_t = S_t - K * B_t$.

(2 points)