

2026

Concours cadre de direction

Les exercices 1, 2 et 3 sont obligatoires.

Les candidats ont le choix entre les exercices 4 et 5.

Les exercices sont indépendants.

Il est demandé aux candidats de justifier les calculs dans les exercices 2 à 5.

Il sera tenu compte de la rédaction de la copie.

Exercice 1 (5 points)

Une seule réponse est correcte parmi les quatre réponses proposées.

Question n° 1 : Pour $x \in \mathbb{R}^*$, on pose $f(x) = \int_x^{3x} \frac{\cos(t)}{t} dt$ et $I = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

Parmi les propositions suivantes, laquelle est vraie ?

- A. La limite n'existe pas.
- B. La limite vaut $I = 0$.
- C. La limite vaut $I = \ln(3)$.
- D. La limite vaut $I = 3$.

Question n° 2 : On pose $u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt[n]{2^k}$, $n \geq 1$, et $S = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Parmi les propositions suivantes, laquelle est vraie ?

- A. La limite vaut $S = 0$.
- B. La limite vaut $S = 1/\ln(2)$.
- C. La limite vaut $S = 1$.
- D. La limite vaut $S = +\infty$.

Question n° 3 : Soit la matrice A donnée par $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. On note A^t la matrice transposée

de A et on considère le produit $A^t A$. Parmi les propositions suivantes, laquelle est vraie ?

- A. Le rang de $A^t A$ est 1.
- B. Le rang de $A^t A$ est 2.
- C. Le rang de $A^t A$ est 3.
- D. Le rang de $A^t A$ est 4.

Question n° 4 : Sur 8 pièces de monnaie, ayant chacune un côté « face » et un côté « pile », il y a 4 pièces pipées. Pour une pièce pipée, la probabilité d'obtenir « face » est de $1/4$ au lieu de $1/2$ pour une pièce non pipée. On choisit une pièce uniformément au hasard parmi les 8 et on lance cette pièce 2 fois successivement. On obtient 2 fois « face ». Quelle est la probabilité que la pièce choisie soit pipée ?

- A. La probabilité vaut $\frac{1}{5}$.
- B. La probabilité vaut $\frac{1}{4}$.
- C. La probabilité vaut $\frac{1}{2}$.
- D. Aucune des possibilités ci-dessus.

Question n° 5 : Soient A et B deux événements tels que $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = 0,4$ et $\mathbb{P}(A \cup B) = 0,6$. Parmi les propositions suivantes, laquelle est vraie ?

- A. On a $\mathbb{P}(A \cap B) = 0$.
- B. On a $\mathbb{P}(A \cap B) = 0,2$.
- C. On a $\mathbb{P}(A \cap B) = 0,4$.
- D. Aucune des possibilités ci-dessus.

Exercice 2 (5 points)

On pose $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq |x|\}$ et $I = \iint_{\Omega} \frac{dxdy}{(1 + x^2 + y^2)^2}$.

- Tracer le domaine d'intégration Ω dans un repère orthonormé et donner sa définition en coordonnées polaires.
- Calculer l'intégrale double I .

Exercice 3 (5 points)

Soit $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires discrètes indépendantes de même loi donnée par :

$$\mathbb{P}(X_i = -1) = \mathbb{P}(X_i = +1) = \alpha \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X_i = 0) = 1 - 2\alpha, \quad \text{avec } i \geq 1, 0 < \alpha < \frac{1}{2}.$$

Pour $i \in \mathbb{N}^*$, on pose $Y_i = X_i + X_{i+1}$.

- Déterminer la loi des variables aléatoires Y_i , $i \in \mathbb{N}^*$.
- Pour quelles valeurs de $(i, j) \in (\mathbb{N}^*)^2$ les variables aléatoires Y_i et Y_j sont-elles indépendantes ?

- On note $Z = \sum_{i=1}^n Y_i$, calculer l'espérance $\mathbb{E}(Z)$ et la variance $\text{Var}(Z)$.

- Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\frac{1}{n} \left| \sum_{i=1}^n Y_i \right| > \varepsilon\right) = 0$.

Un exercice au choix parmi :

Exercice 4 (5 points)

Soit $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^*$ et $M(a, b) = (M_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ la matrice carrée d'ordre n , avec $n \geq 2$, définie par :

$$M_{ii} = \alpha \text{ pour } 1 \leq i \leq n \text{ et } M_{ij} = b \text{ pour } 1 \leq i \neq j \leq n.$$

On note I_n la matrice identité d'ordre n .

- Calculer le déterminant $d(a, b)$ de $M(a, b)$.
- Calculer le polynôme caractéristique $P_M(X)$ de $M(a, b)$.
- En déduire les valeurs propres de $M(a, b)$, avec leur multiplicité.
- Pour quelles valeurs de a et b la matrice $M(a, b)$ est-elle inversible ? Déterminer alors $M^{-1}(a, b)$.

Indication : On pourra admettre que la matrice symétrique réelle $M(a, b)$ qui n'a que des valeurs propres réelles, vérifie

$$\prod_{\{\lambda, \text{ valeur propre de } M(a, b)\}} (M(a, b) - \lambda I_n) = O.$$

5. Soit $p \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe deux suites réelles (α_p) et (β_p) telles que :

$$M(a, b)^p = \alpha_p M(a, b) + \beta_p I_n.$$

Montrer que α_p vérifie une récurrence linéaire d'ordre deux.

En déduire α_p et β_p en fonction des valeurs propres de $M(a, b)$.

Exercice 5 (5 points)

Cet exercice est constitué de deux parties indépendantes.

On étudie sur l'intervalle de temps $[0, T]$ le marché des devises entre l'euro (EUR) et la livre sterling (GBP). Les principales hypothèses et notations sont les suivantes :

- Ce marché des changes est complet et il y a absence d'opportunité d'arbitrage (AOA).
- Dans la zone Euro, on considère un actif sans risque domestique de taux d'intérêt continu r_d . Son prix est normalisé en T . On note $B_t^d = \exp[-r_d \cdot (T - t)]$ son prix en EUR pour tout $t \in [0, T]$.
- Dans l'économie anglaise, il existe également un actif sans risque, de taux d'intérêt continu r_f . Son prix est normalisé en T . On note $B_t^f = \exp[-r_f \cdot (T - t)]$ son prix en GBP pour tout $t \in [0, T]$.
- Le taux de change entre les deux devises EUR et GBP est noté S_t : pour obtenir 1 GBP à la date t , il faut déboursier S_t EUR.
- Enfin, il existe sur ce marché des contrats forward pour toute date $t \in [0, T]$. Un contrat forward contracté à la date t est déterminé par les flux financiers suivants :
 - ◇ Aucun échange de flux à la date d'entrée t dans le contrat.
 - ◇ À l'échéance T , on reçoit 1 GBP contre F_t EUR. F_t correspond au montant fixé à la date d'entrée t du contrat forward.

1. Déterminer le pay-off en euros à la date T des deux portefeuilles suivants X et Y, constitués à la date $t \in [0, T]$, en fonction de la valeur du taux de change S_T .

Portefeuille X :

- Emprunt de la somme $F_t \cdot B_t^d$ EUR au taux sans risque domestique.
- Achat de B_t^f GBP. Ce montant est ensuite investi dans l'actif sans risque de l'économie anglaise.

Portefeuille Y :

- Achat d'un contrat forward contracté à l'instant t , de prix F_t

En déduire, par raisonnement d'arbitrage, le prix F_t en fonction de la valeur du taux de change S_t à l'instant t .

2. Déterminer le pay-off en euros à la date T du portefeuille Z.

Portefeuille Z :

- Achat d'un contrat forward contracté à l'instant $t = 0$, de prix F_0 .
- Vente à découvert d'un contrat forward contracté à l'instant $t > 0$, de prix F_t .

En déduire, par raisonnement d'arbitrage, le prix f_t^0 correspondant au prix en EUR à la date t du contrat forward d'échéance T et initié à $t = 0$, en fonction de F_t et F_0 . Puis en fonction de S_t et S_0 .

On considère à présent un autre marché constitué de deux actifs :

- L'actif sans risque B vaut 100 à $t = 0$ et 105 à $t = T$.
- L'actif risqué V vaut 100 à $t = 0$. À $t = T$ son prix a une probabilité $p = 0,8$ de monter à 130 et une probabilité $1 - p = 0,2$ de descendre à 90.

3. Rappeler la définition de la probabilité neutre au risque associée à ce marché et la calculer.

4. Calculer le prix à $t = 0$ de ces deux produits financiers :

- Une option d'achat (call) sur l'actif risqué sous-jacent V de maturité T et de strike $K = 100$.
- Une option de vente (put) sur l'actif risqué sous-jacent V de maturité T et de strike $K = 100$.

Dans les deux cas, on considère des options à la monnaie à $t = 0$.